

Table des matières

Introduction.....	2
1- Présentation générale du système GPS.....	3
1.1- Description du système.....	3
2.2- Le signal GPS.....	5
2.3- Comment se positionner ?.....	6
2.4- Les sources d'erreur.....	7
2- Calcul de la position à partir du C/A code.....	9
2.1- Théorie.....	9
2.1.1- Le calcul.....	9
2.1.2- Mise en oeuvre.....	13
2.2- Pratique.....	13
2.2.1- Données utilisées.....	13
2.2.2- Exploitation des données.....	15
2.3- Résultats.....	18
2.3.1- Moyennes et écarts-types.....	18
2.3.2- Résultats obtenus en supprimant une partie du calcul.....	20
2.3.3- Conclusion.....	21
3- Traitement de données de positionnement.....	22
3.1- Le contexte expérimental : tester la stabilité d'un mât.....	22
3.2- Comment analyser ces données de positionnement ?.....	23
3.2.1- Quelques éléments sur les processus stochastiques.....	24
3.2.2- Mise en oeuvre.....	25
3.3- Exposé et commentaire des résultats.....	26
3.3.1- Auto-corrélation et filtrage du signal.....	26
3.3.2- Inter-corrélation.....	26
3.3.3- Interprétation.....	27
3.3.4- Comparaison avec les résultats du CR et conclusion.....	27
CONCLUSION GENERALE.....	28
Bibliographie.....	29

Introduction

Ce compte-rendu a pour objectif de présenter l'étude que nous avons menée du système GPS au cours du deuxième semestre de l'année scolaire 2000/2001, dans le cadre d'un MODEX d'électronique. Après un temps de familiarisation avec le matériel présent à l'Ecole, en particulier en ce qui concerne les logiciels permettant la récupération des données, nous avons choisi d'orienter notre travail dans deux directions complémentaires l'une de l'autre. D'abord une étude plus approfondie d'une méthode de calcul de la position qui a pour objectif de savoir obtenir la position du récepteur en fonction des informations obtenues grâce à la réception satellitaire, et ce, en tenant compte de différents postes d'erreurs que nous présenterons. Ensuite, l'analyse d'un enregistrement de la position d'un point fixe sur une longue période, domaine d'étude qui se rapproche plus du traitement du signal.

Ainsi, nous tâcherons, dans une première partie, de présenter de manière succincte le fonctionnement du système GPS, en essayant de détailler les points les plus utiles pour les deux parties suivantes dans lesquelles nous expliquerons de manière plus précises les objectifs et les résultats obtenus dans le cadre des deux études déjà citées.

1- Présentation générale du système GPS

Il convient tout d'abord de noter que cette présentation très incomplète du système a pour seul objectif de permettre au lecteur, non pas de connaître avec précision le fonctionnement du système GPS, mais simplement de pouvoir comprendre de manière aisée les développements des parties 2 et 3. On remarquera également que cette partie est largement inspirée du cours de Monsieur Serge Botton, professeur à l'ENSG.

Après avoir décrit le système, nous présenterons les caractéristiques du signal GPS. Enfin, nous examinerons comment il est possible de se positionner, les différentes méthodes utilisées, et les diverses sources d'erreurs à prendre en compte.

1.1- Description du système

Le système GPS est composé de trois secteurs :

- le secteur spatial : les satellites
- le secteur de contrôle
- le secteur utilisateur : les récepteurs GPS

Nous ne décrivons que le premier qui détermine, en réalité, le fonctionnement total du système

Le secteur spatial est donc constitué de 24 satellites (figure 1-1) qui sont repérés par leur numéro qui désormais peut dépasser 30 à cause de leur renouvellement progressif. Leur altitude, choisie pour des raisons stratégiques, détermine leur période de révolution qui est d'environ 11h58. L'inclinaison de 55° des plans d'orbite permet de toujours obtenir une qualité de réception suffisante dans les régions nord-américaines, ce qui n'est pas le cas dans les régions polaires par exemple.

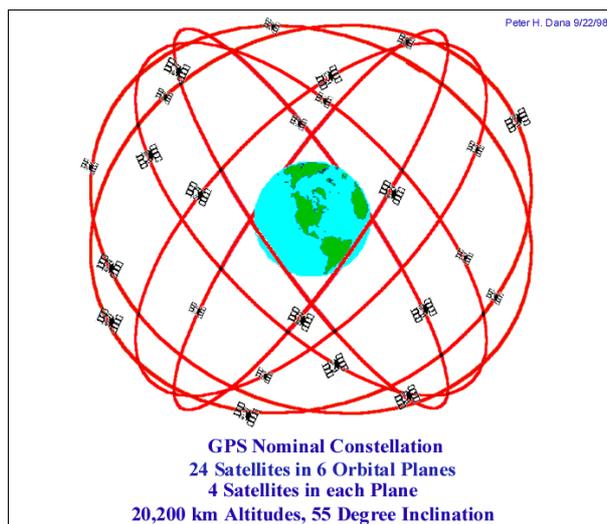


Figure 1-1

L'observation de la trace finale de l'ensemble de ces satellites (figure 1-2) permet de mieux évaluer combien ils sont à même d'être capté de manière efficace sur quasiment toute la surface du globe. La carte du ciel au pôle Sud permet alors de comprendre que les régions polaires sont moins avantageées car les satellites sont trop souvent bas sur l'horizon (figure 1-3).

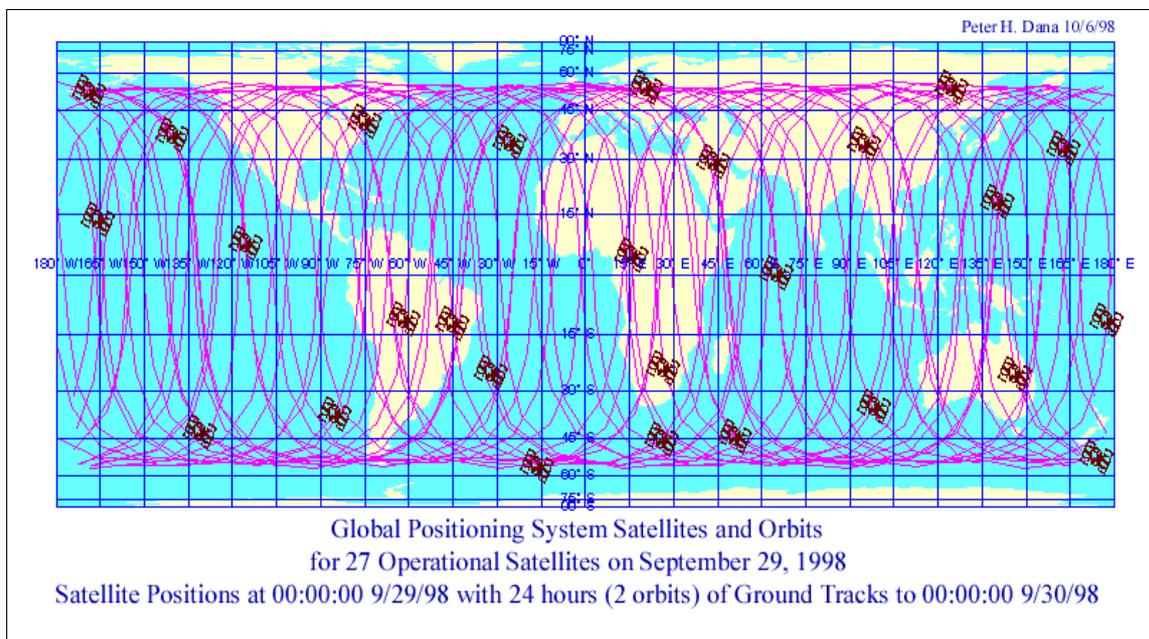


figure 1-2

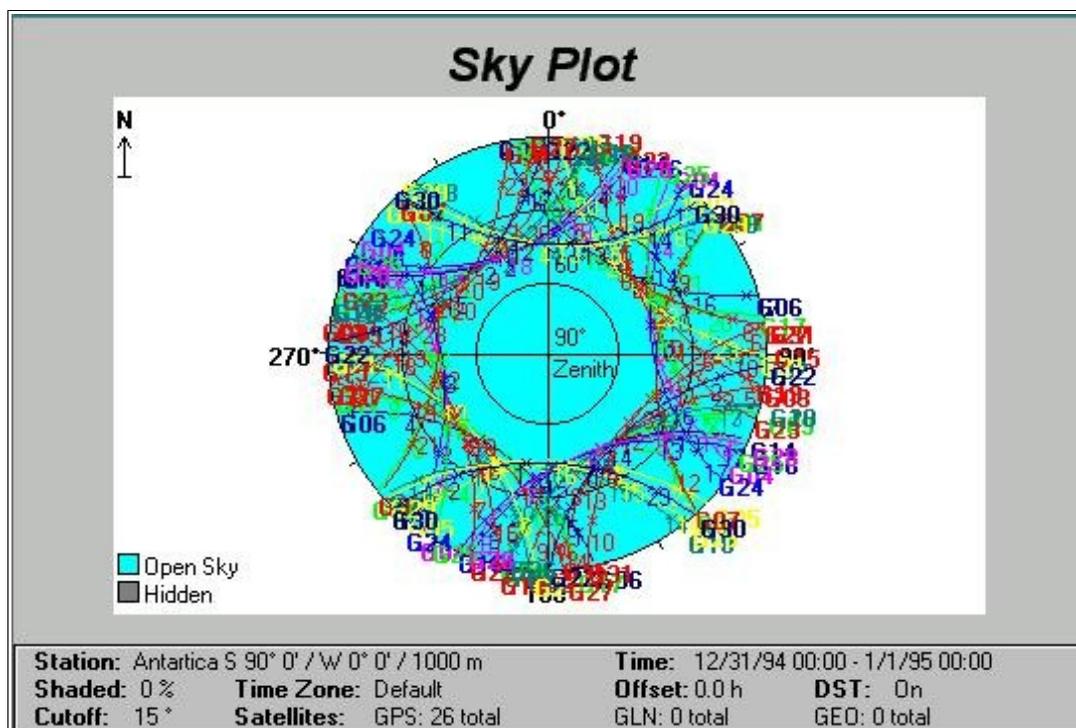


figure 1-3

2.2- Le signal GPS

Le signal émis par chaque satellite est ainsi construit (figure 1-4) :

On distingue:

- une fréquence fondamentale $f = 10.23 \text{ MHz}$
- deux fréquences porteuses $L1 = 154 f = 1575.42$ et $L2 = 120 f = 1227.60 \text{ MHz}$
- trois signaux de modulations :
 - le C/A code (Coarse Acquisition) qui est répété tous les 1023 bits et modulé à $f/10$. Ce code a pour fonction de permettre de reconnaître de quel satellite provient le signal car chaque satellite possède son propre C/A code.
 - le P code uniquement destiné à un usage militaire, il est répété sur une période de 7 jours et est crypté pour devenir le Y code
 - le NAVIGATION DATA ou message de navigation : à 50 bits/s, il contient des informations générales, en particulier en ce qui concerne les orbites des satellites et les corrections de leurs horloges.

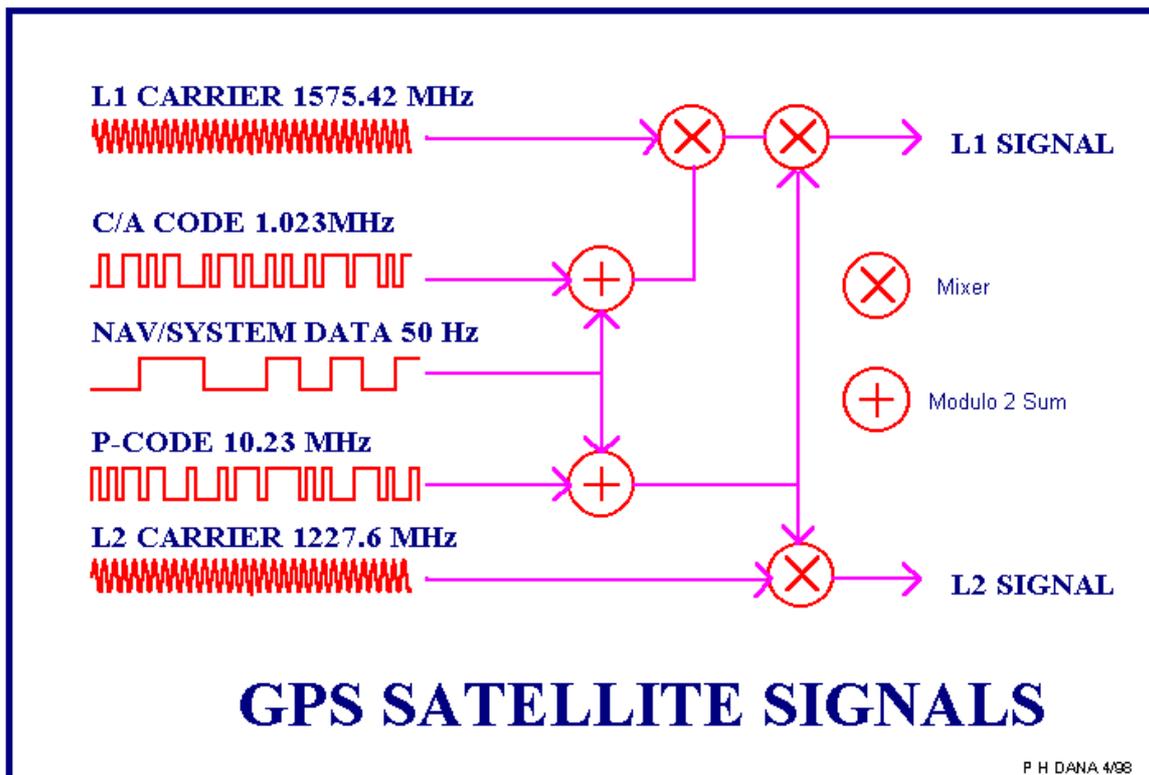


Figure 1-4

2.3- Comment se positionner ?

Il est clair que le positionnement nécessite au moins 3 distances, c'est-à-dire trois satellites dont on puisse connaître à la fois la position et la distance qui les séparent du récepteur. Concernant les orbites des satellites, remarquons déjà que celles-ci sont disponibles à partir du Message de navigation. Toutefois, il est possible de récupérer des données plus précises grâce au service de l'IGS (International GPS Service, service qui s'appuie sur les mesures des stations permanentes comme celles du RGP (Réseau de GPS Permanent) en France) qui propose plusieurs types de fichiers selon la précision désirée. Néanmoins il faut encore déterminer une inconnue qui est le temps. En effet, même si chaque satellite fournit sa propre erreur d'horloge, il reste encore à savoir quel est l'heure au moment où la mesure est effectuée. C'est pourquoi, il faut obligatoirement un 4ème satellite comme le résume la figure 1-5.

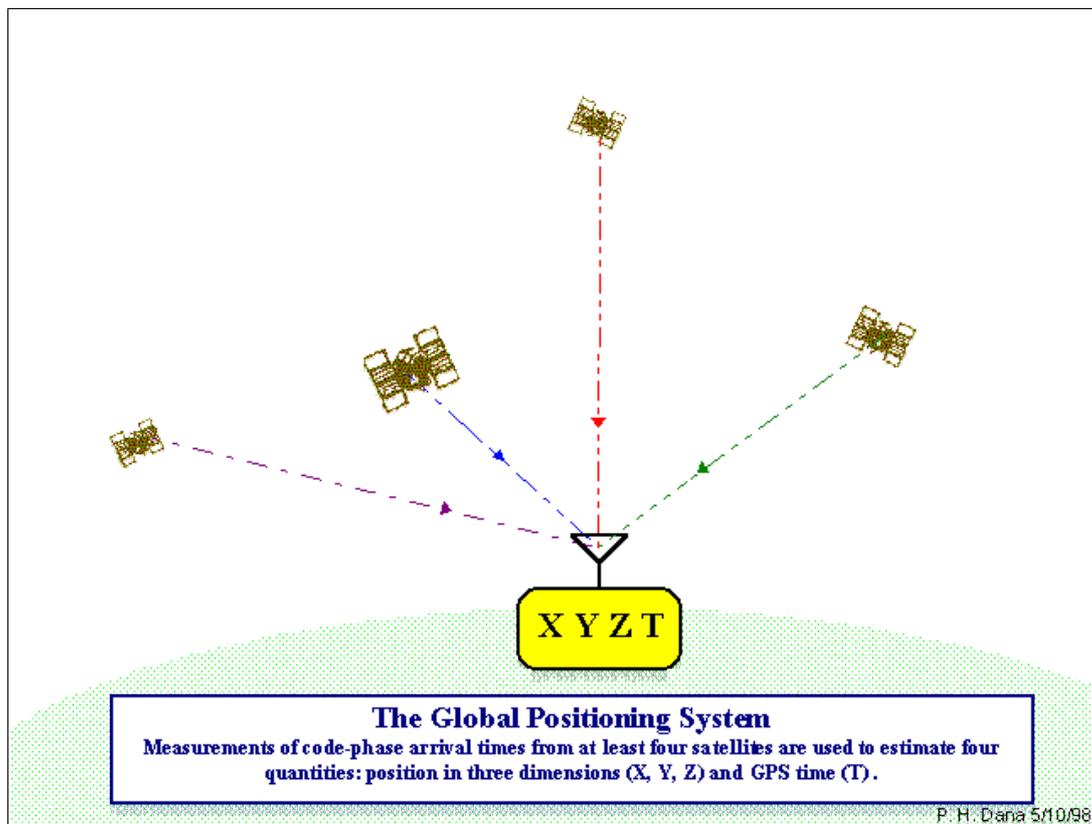


Figure 1-5

On distingue deux types de positionnement : l'un à l'aide du code, l'autre à l'aide de la phase du signal reçu. Le principe du positionnement à l'aide du code est le suivant : le récepteur génère dans une échelle de temps proche de celle du temps GPS le code d'un satellite. Par corrélation avec le code reçu, il établit alors l'écart de temps qu'il y a entre les deux codes et établit ainsi une distance après avoir tenu compte des différentes sources d'erreur possibles (cf plus loin). C'est cette méthode qui sera pratiquée dans l'étude présentée en deuxième partie.

Le principe de positionnement à l'aide la phase est plus difficile à mettre en oeuvre mais

plus précis. En effet on mesure alors la différence de phase entre le signal reçu et un signal généré par le récepteur. La difficulté est issue du fait que les fréquences mises en jeu sont très élevées, elles correspondent à des longueurs d'onde de 19 et 24.4 cm pour L1 et L2 respectivement.

On peut également présenter ce qu'est le DGPS (Differential GPS) : il s'agit simplement d'avoir à sa disposition deux récepteurs dont l'un est situé sur un point dont les coordonnées sont connues précisément (un récepteur du RGP par exemple). On peut alors déterminer de manière très précise la ligne de base c'est-à-dire le vecteur formé par les deux positions des récepteurs en formant les simples et/ou double différences sur les mesures.

Notons pour finir qu'il n'est pas apparu nécessaire jusqu'ici d'utiliser les deux fréquences d'émission, pourtant des méthodes particulières permettent d'en tirer partie, en particulier en éliminant les décalages liés à l'ionosphère. Il existe donc des récepteurs bifréquence. Dans la troisième partie de compte-rendu, les données traitées ont justement été obtenues avec deux récepteurs bifréquence travaillant en DGPS et par mesure sur la phase, c'est-à-dire dans les meilleures conditions de précision possibles.

La figure 1-6 permettra au lecteur de mieux évaluer le gain qu'apporte ces diverses techniques à la précision du positionnement. SA pour Selective Availability désigne le système géré par le DoD américain qui limite la précision (il est actuellement hors service). SPS pour Standard Positioning Service se distingue du PPS pour Precise PS par la non utilisation du code militaire

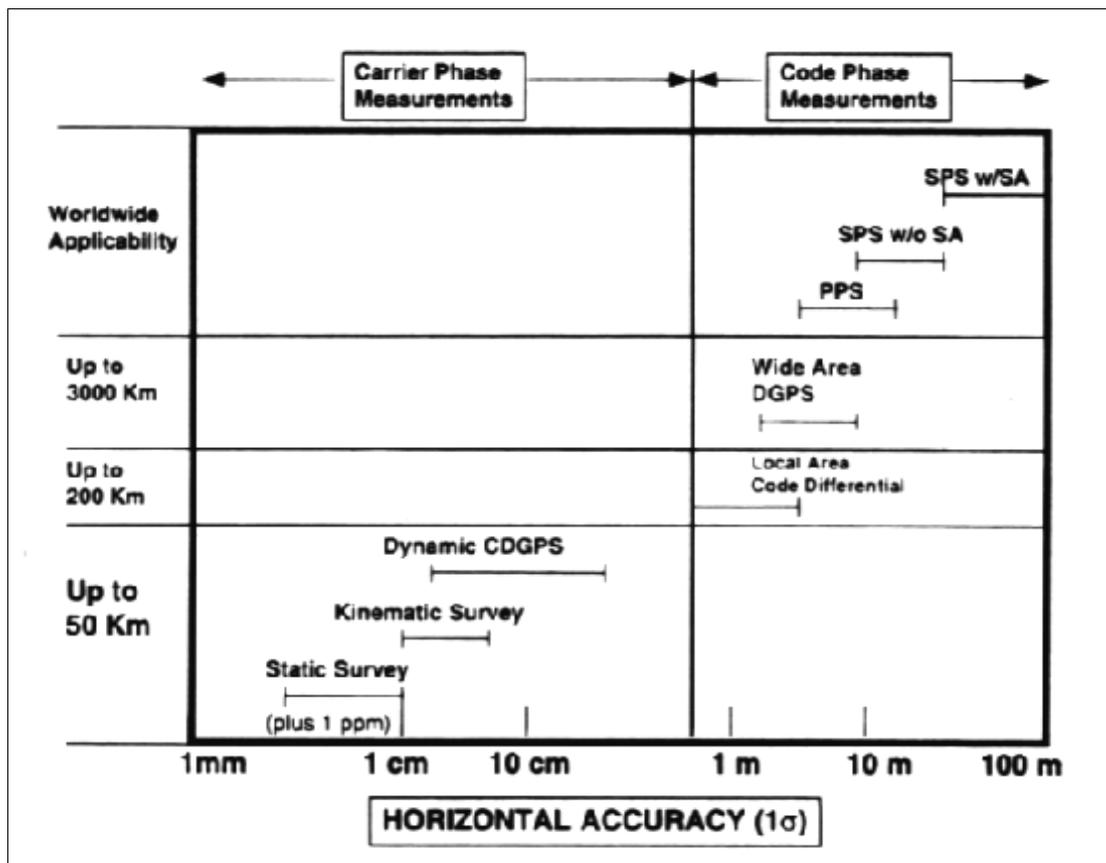


Figure 1-6

2.4- Les sources d'erreur

Les sources d'erreur sont bien résumées à la figure 1-7. Outre le système SA déjà rencontré, on rencontre les erreurs dues :

- à la troposphère : variations de température, pression, et d'hygrométrie
- à la ionosphère : les gaz ionisés provoquent des retards de propagations et/ou des retard de la phase
- aux trajets multiples : réflexion du signal sur des surfaces proches du récepteur
- aux horloges : celle du satellite et du récepteur ou encore des effets relativistes sur celle du satellite

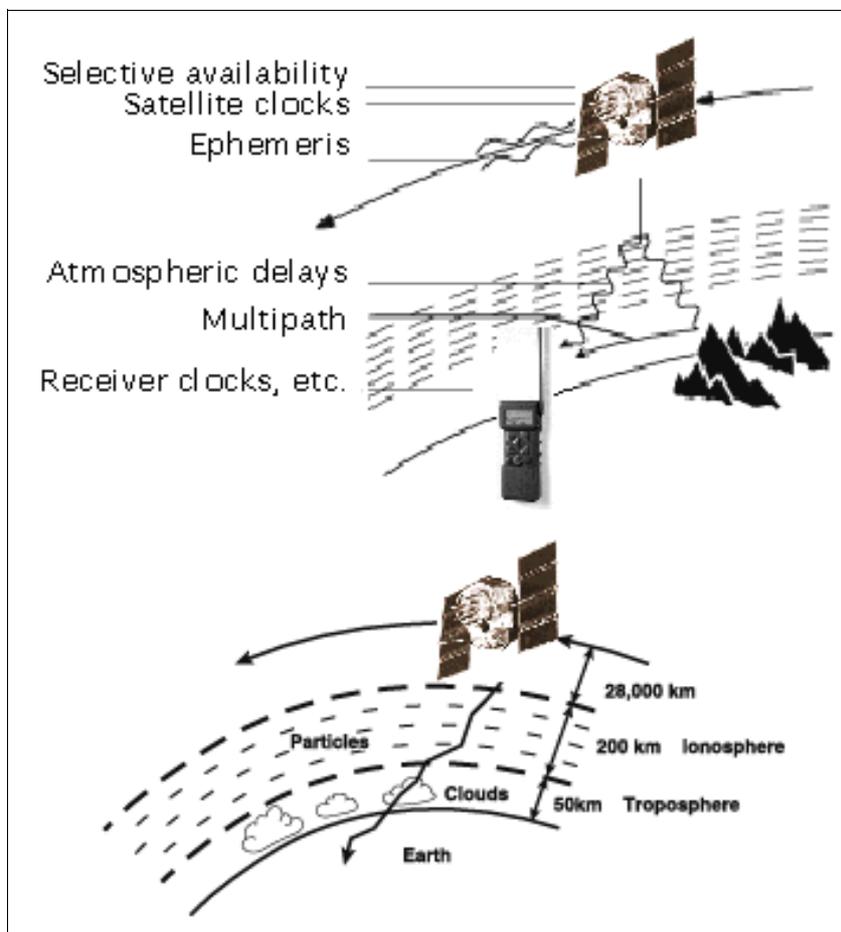
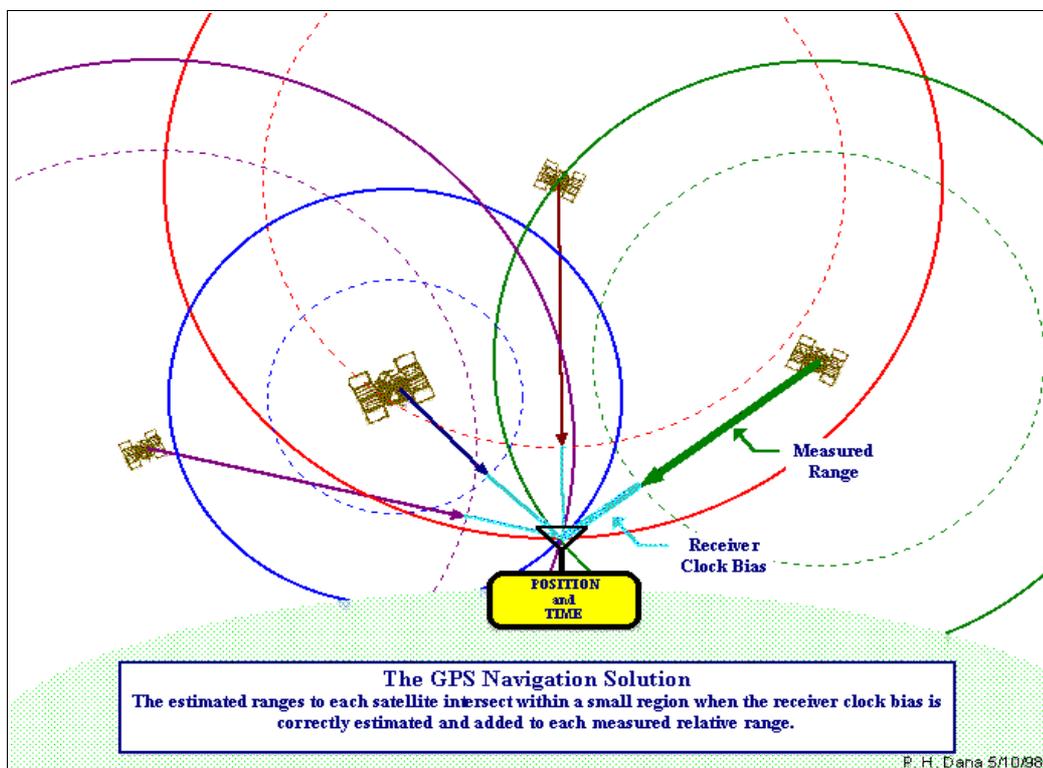


figure 1-7

2- Calcul de la position à partir du C/A code

Du point de vue du problème géométrique, la connaissance de la position de 3 satellites et de la distance du récepteur à chacun de ces satellites permet de calculer la position du récepteur. Exactement, ce problème a deux solutions, dont une très éloignée de la surface de la terre. Cependant, pour différentes raisons, et notamment le coût des récepteurs, les horloges de ces derniers ne sont pas suffisamment précises à long terme pour permettre un calcul de position. Il faut donc introduire une 4ème inconnue : le décalage de l'horloge du récepteur par rapport au temps GPS officiel. Ainsi, il faudra 4 satellites au moins pour calculer sa position. C'est ce que représente le diagramme ci-dessous.



2.1- Théorie

2.1.1- Le calcul

2.1.1.1- A partir du pseudorange

Dans toute la suite, on note en exposant le numéro k du satellite concerné, sachant qu'il y a K satellites. Le récepteur ne mesure pas la distance qui le sépare du satellite. Il mesure le temps qu'a mis le signal à lui parvenir du satellite. C'est pourquoi on définit le pseudorange ρ^k du récepteur au satellite k de la manière suivante :

$$\rho^k = r^k + c \cdot [\delta t_u - \delta t^k] + I^k + T^k + \epsilon_\rho^k$$

r^k : Distance géométrique entre récepteur et satellite k

δt_u : Décalage de l'horloge du récepteur par rapport au temps GPS

δt^k : Décalage de l'horloge du récepteur par rapport au temps GPS

I^k : Correction ionosphérique

T^k : Correction troposphérique

ϵ_ρ^k : Erreur

Divisé par la vitesse de la lumière, le pseudorange correspond au temps de parcours du signal estimé par le récepteur. On suppose dans cette partie que le pseudorange est déjà calculé.

On peut réécrire l'équation :

-On regroupe les différents termes d'erreurs non modélisés ici (Ionosphère, troposphère, trajets multiples, bruit du récepteur)

-On note b le décalage de l'horloge du récepteur et b^k celui des satellites, tous deux convertis en mètre, qui sera la seule unité utilisée par la suite dans les calculs

-On note \mathbf{x}^k les coordonnées d'espace du même satellite, et \mathbf{x} les coordonnées d'espace du récepteur qui sont les inconnues du problème.

On obtient donc K équations de la forme :

$$\rho^k = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}\| + b - b^k + \tilde{\epsilon}_\rho^k$$

Ce système comporte 4 inconnues (3 d'espaces et b), donc il faut bien que K soit supérieur ou égal à 4. De plus ce système est non linéaire. Pour le résoudre de manière approchée, il faut donc l'approximer localement en un système linéaire. La résolution du problème nécessite donc la donnée d'une position approchée (par exemple : la dernière position calculée) à partir de laquelle on linéarise le système. On note les coordonnées qui s'y rapportent avec un zéro en indice :

$$\rho_0^k = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}_0\| + b_0 - b^k$$

Posons :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x} \quad , \quad b = b_0 + \delta b$$

Et linéarisons :

$$\begin{aligned} \delta \rho^k &= \rho^k - \rho_0^k \\ &= \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}_0 - \delta \mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}_0\| + (b - b_0) + \tilde{\epsilon}_\rho^k \\ &\approx -\frac{(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}_0\|} \cdot \delta \mathbf{x} + \delta b + \tilde{\epsilon}_\rho^k \\ &= -\mathbf{1}^k \cdot \delta \mathbf{x} + \delta b + \tilde{\epsilon}_\rho^k \end{aligned}$$

Le vecteur $\mathbf{1}^k$ est le vecteur unitaire correspondant à la direction dans laquelle on estime que le récepteur "voit" le satellite.

Réécrivons le système :

$$\delta \rho = \begin{bmatrix} \delta \rho^1 \\ \delta \rho^2 \\ \vdots \\ \delta \rho^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\mathbf{1}^1)^T & 1 \\ (-\mathbf{1}^2)^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ (-\mathbf{1}^K)^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta b \end{bmatrix} + \tilde{\epsilon}_\rho$$

Ou encore :

$$\delta(\rho) = \mathbf{G} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta b \end{bmatrix} + \tilde{\epsilon}_\rho$$

En notant :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (-\mathbf{1}^1)^T & 1 \\ (-\mathbf{1}^2)^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ (-\mathbf{1}^K)^T & 1 \end{bmatrix}$$

On remarque que cette matrice représente la manière dont les satellites sont disposés autour du récepteur.

Comme il est possible et dans la pratique très probable que K soit supérieur ou égal à 4, le système sera en général surdéterminé. On utilise donc la méthode des moindres carrés pour le résoudre avec une matrice de covariance égale à l'identité :

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta b \end{bmatrix} = (\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G})^{-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \delta \rho$$

Ainsi on obtient une estimation de la position du récepteur et du décalage de son horloge :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x} \\ \hat{b} &= b_0 + \delta b \end{aligned}$$

On peut procéder de manière itérative pour affiner l'estimation de la position jusqu'à ce que la correction apportée à l'estimation suffisamment faible comparée aux autres erreurs en jeu.

2.1.1.1.2- Une estimation rapide de la qualité du calcul

Dans le cas où le nombre de satellites en vue est strictement plus grand que 4, la théorie des estimations par les moindres carrés donne les estimateurs suivant de la précision de l'estimation de la position:

$$Cov \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G})^{-1}$$

$$\text{avec : } \hat{\sigma}_0 = \frac{\tilde{\epsilon}_\rho^T \cdot \tilde{\epsilon}_\rho}{(K-4)}$$

On suppose que les erreurs entre les satellites sont décorréliées, C'est-à-dire :

$$E(\tilde{\epsilon}_\rho \cdot \tilde{\epsilon}_\rho^T) = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{I}$$

avec σ de l'ordre de quelques mètres . Ainsi on obtient une estimation de l'erreur:

$$E \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \approx (\mathbf{H}_{11} + \mathbf{H}_{22} + \mathbf{H}_{33})$$

$$E (b - \hat{b})^2 \approx (\mathbf{H})_{44}$$

avec : $\mathbf{H} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G})^{-1}$

On peut définir la dilution de précision en position (Position Dilution Of Precision):

$$PDOP = \sqrt{\mathbf{H}_{11} + \mathbf{H}_{22} + \mathbf{H}_{33}}$$

C'est une estimation de la qualité de la mesure faite.

On définit de même la HDOP et la VDOP (Horizontal ou Vertical Dilution Of Precision) :

$$HDOP = \sqrt{\mathbf{H}_{NN} + \mathbf{H}_{EE}}$$

$$VDOP = \sqrt{\mathbf{H}_{RR}}$$

après un changement de base d'une base géocentrique vers une base locale (Verticale, Est, Nord)

L'intérêt de la DOP est de pouvoir éliminer les données qui semblent être particulièrement entachées d'erreur, en général du fait d'une trop mauvaise configuration géométrique si on les a déjà enregistrées, et de prévoir la meilleure période d'observation en fonction des prévisions d'orbites si on doit aller en faire.

2.1.1.3- Le calcul du pseudorange

Un problème : les ambiguïtés entières

Un problème supplémentaire se pose dans la réalité : Le signal du C/A code émis par le satellite est périodique de période $tc=1$ ms. Le récepteur compare ce signal avec un signal qu'il régénère lui-même, le résultat de la mesure est donc un décalage entre les deux signaux modulo 1 ms. On connaît en fait le pseudorange à un multiple entier de $c \cdot tc$, On a donc :

$$\rho^k = n^k \cdot c \cdot tc + \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}\| + b - b^k + \tilde{\epsilon}_\rho^k$$

$$\rho^k \in [0, c \cdot tc]$$

tc : durée d'un C/A code

n : ambiguïté entière

Il faut lever les ambiguïtés entières avant de commencer le calcul.

Si on a absolument aucune estimation de la position du récepteur, on peut procéder de la manière suivante . Il faut avoir strictement plus de 4 satellites en vue. On découpe l'espace en volumes correspondant à une combinaison d'ambiguïtés, puis on calcule une solution par volume. La solution qui a le plus de chance d'être exacte est celle qui correspond aux résidus les plus petits.

Dans le cadre de ce modex, on a résolu ce problème en donnant une position approchée à l'algorithme, puisque le récepteur utilisé était fixe. Il suffit que cette position corresponde à un point où le jeu d'ambiguïtés entières aurait été le même si on y avait fait une mesure au même moment. Le volume ainsi défini a une forme qui dépend de la position des satellites, mais son rayon est de l'ordre de la centaine de kilomètres. Ainsi, on peut facilement calculer les ambiguïtés entières.

Une solution au problème des ambiguïtés entières

D'après la relation précédente, en supposant la position approchée suffisamment proche de la position réelle, on obtient les équations suivantes qui donnent les ambiguïtés entières à utiliser dans l'algorithme décrit dans la première partie.

$$n^k = \frac{\rho^k - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}_0\| + b^k}{tc \cdot c} - \frac{e^k}{tc \cdot c}$$
$$\text{avec } e^k \in \left[-\frac{c \cdot tc}{2} + e_0, \frac{c \cdot tc}{2} + e_0 \right]$$

Si les mesures sont correctes et si la position approchée donnée est très proche de la position du récepteur, les e^k sont très proches. On peut alors faire une première estimation du décalage de l'horloge :

$$\hat{b} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K e^k$$

Dans ce modex, on a pris e_0 égal à 0, ce qui ne pose pas de problème sauf si les e^k sont réparti de part et d'autre de $0,5 \cdot c \cdot tc$ (par exemple, certains égaux à $0,49 \cdot c \cdot tc$ et d'autres égaux à $-0,49 \cdot c \cdot tc$). Dans ce dernier cas, les ambiguïtés déterminées seront fausses et le résultat aberrant. En fait ce cas est rare car les e^k sont très proches l'un de l'autre du fait de la qualité de la position approchée donnée.

Enfin, on peut remarquer que seule la différence entre deux ambiguïtés entières est importante pour résoudre les coordonnées géographiques. Si on commet une erreur en ajoutant la même quantité N à toutes les ambiguïtés entières n^k , on va retrouver cette erreur e directement sur la détermination de b , décalage de l'horloge du récepteur.

2.1.2- Mise en oeuvre

Les fonctions qui mettent en oeuvre les calculs décrits se trouve dans le fichier `gps.sci`. La fonction essentielle est la fonction `rec` qui reprend fidèlement le calcul décrit en conservant aussi souvent que possible les notations utilisées. La fonction généralement appelée est la fonction `conv`, car elle se charge de convertir en mètre toutes les données nécessaire au calcul de la position.

2.2- Pratique

2.2.1- Données utilisées

2.2.1.1- Mesures du récepteur

Les récepteurs utilisés possèdent 2 ports série. Le premier utilise le format NMEA très répandu parmi les récepteurs commerciaux. Il donne les informations utiles à une exploitation immédiate de la position calculée. Le deuxième est plus spécifique, il transmet beaucoup plus d'informations. Parmi elles, la plus importante est la mesure du décalage du C/A code pour chaque satellite. Elle est donnée en 16ème de bit et est toujours positive. Sachant qu'il y a 1023 bits dans un C/A code qui dure lui même $tc=1ms$, on a:

$$\rho^k = -\text{mesure du décalage} \cdot \frac{tc}{1023 \cdot 16}$$

Voici un exemple de fichier de données :

```
Raw Measurement Data
SV Sample SNR Code Phase Doppler Seconds Time of Meas
15 1 4.0 4555.51 3230.08 201600.000 Tue 07:59:00.00
17 1 14.8 15849.08 2410.20 201600.000 Tue 07:59:00.00
25 1 10.6 1841.51 -1310.35 201600.000 Tue 07:59:00.00
30 1 16.4 15473.88 -3373.88 201600.000 Tue 07:59:00.00
01 1 0.8 243.26 -347.24 201600.000 Tue 07:59:00.00
Dbl Pos: 4213463.39 162478.98 4769773.20 121990.09 Tue 07:59:00.00
Dbl Pos: 48 42.805 N 2 12.500 E 243.05 121990.09 Tue 07:59:00.00
Vel ECEF: 0.021 0.002 -0.019 -126.373 Tue 07:59:00.00
Vel ENU: 0.00 -0.03 -0.00 -126.37 Tue 07:59:00.00
SPkt 8F-20: 07:59:0.00 48:42.80542 N 2:12.50025 E 243.05
* * 0.000 E -0.030 N -0.005 U - PP:Y I:2D-2DC-P
* * 15(158h) 17( 67h) 25( 23h) 30( 7Fh)
GPS time: Tue 08:00:00.23 GPS week: 1111 UTC offset 13.0
Health of GPS: Doing position fixes
Machine/Code ID: 90 Status: 0 1 Superpackets supported
Mode: Auto 4 SV (2-D): 15 17 25 30
P, H, V, TDOP = 2.02, 2.02, 0.03, 1.05
```

Cette partie de fichier correspond à un enregistrement effectué le 24 Avril 2001. La mesure a été faite à 8 heure et non à 7 heure 59 comme indiqué. Il s'agit là d'un bug du logiciel! En gras, on a indiqué les mesures de décalage du C/A code. On a souligné la position calculée par le récepteur à partir des mesures. Cette position est donnée dans un repère lié à la Terre. Le récepteur est donc fixe dans ce repère pendant toute la durée des mesures. Le but de cette partie du modex est bien sûr d'essayer de calculer une position aussi bonne.

2.2.1.2- Les orbites

Plutôt que de calculer les orbites à partir de leurs éléments képlériens donnés dans les éphémérides radiodiffusés par les satellites, on a utilisé des orbites données par l'IGS. Ces orbites sont beaucoup plus précise que ce dont on avait besoin, mais elles présentent l'intérêt d'être simple à utiliser. Elles sont disponibles sur internet à l'adresse :

ftp://igsb.jpl.nasa.gov/pub/product/'n° de la semaine GPS'/*.sp3.Z

Les fichiers sont au format .sp3. Ils se présentent sous la forme de tableau qui donnent la position tous les quarts d'heure de tous les satellites pendant une journée. La position est donnée dans un repère lié à la Terre. L'unité est le kilomètre. On y trouve aussi les décalages des horloges des satellites par rapport au temps GPS en microsecondes.

Voici un exemple de l'entête et du premier quart d'heure pour le 24 Avril 2001

```
#aP2001 4 24 0 0 0.00000000 96 ORBIT IGS97 HLM IGS
## 1111 172800.00000000 900.00000000 52023 0.00000000000000
+ 29 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 13 14 15 17 18 19
+ 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 0 0 0 0 0 0
+ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
+ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 4 4 4 4 5 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 4
++ 4 4 5 5 4 4 4 4 4 4 4 4 0 0 0 0 0 0
++ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
%C cc cc ccc ccc cccc cccc cccc cccc ccccc ccccc ccccc ccccc
%C cc cc ccc ccc cccc cccc cccc cccc ccccc ccccc ccccc ccccc
```

```

%f 0.0000000 0.000000000 0.00000000000 0.000000000000000
%f 0.0000000 0.000000000 0.00000000000 0.000000000000000
%i 0 0 0 0 0 0 0 0 0
%i 0 0 0 0 0 0 0 0 0
/* FINAL ORBIT COMBINATION FROM WEIGHTED AVERAGE OF:
/* cod emr esa gfz jpl ngs sio
/* REFERENCED TO GPS CLOCK AND TO WEIGHTED MEAN POLE:
/* CLK ANT Z-OFFSET (M): II/IIA 1.023; IIR 0.000
* 2001 4 24 0 0 0.00000000
P 1 -3574.050052 20430.138080 -16405.366506 174.604294
P 2 20678.347424 10640.100807 13857.354519 -4.099237
P 3 -17329.452961 -1547.299154 20042.897748 23.053894
P 4 13860.841714 6143.090798 -21756.086393 702.967872
P 5 11854.965639 -13785.927742 -19358.956101 295.514764
P 6 -3602.939261 -24379.481847 -9460.257802 -0.581900
P 7 16047.957529 19663.772400 -7900.348720 581.900719
P 8 6063.518211 15642.660813 20323.259308 150.524550
P 9 15406.473471 -21306.604810 1070.224524 -41.885277
P 10 25214.618570 -3086.733681 8126.905413 2.959889
P 11 -15023.811635 21913.745801 995.168384 1.889658
P 13 5630.569466 24862.521196 -7627.929675 -1.295021
P 14 -16363.216919 -18004.330441 -10463.086814 -103.141553
P 15 -4227.713185 -16278.094953 20290.704496 999999.999999
P 17 2182.833999 -19777.084920 17254.861929 999999.999999
P 18 -9233.808329 -15253.470399 19677.446195 -99.981765
P 19 -8709.710512 24155.913713 6335.418548 505.861507
P 20 -10718.444130 13299.002749 -20409.437899 -66.649798
P 21 -21717.780206 -10460.186481 12184.970201 2.563320
P 22 -26838.586971 -773.869290 116.673697 582.264663
P 23 -6081.048035 -15313.441721 21349.987806 11.719733
P 24 19421.424511 -7582.384635 -16147.637730 45.428880
P 25 -15786.450885 -3499.240232 -20775.726442 13.082142
P 26 12409.370134 -8803.294207 21636.066805 445.377816
P 27 -362.165700 21369.949048 15623.339728 18.380110
P 28 -18917.034713 9502.159123 16051.742849 9.981012
P 29 -17094.043791 -16557.845075 -11650.766059 526.050749
P 30 -411.774650 -15715.744125 -21595.909339 -16.859829
P 31 -10820.810006 11965.203069 20793.606474 40.801607

```

On a mis en gras la position du satellite n°1 à 0h00 le 24 Avril 2001 et on a souligné le décalage de son horloge par rapport au temps GPS. On constate que les satellites 15 et 17 seront inutilisables car il a été impossible de connaître le décalage de leur horloge. De plus il n'y avait à ce moment ni satellite 12 ni satellite 16. Ainsi, il y avait 27 satellites utilisables ce jour-là.

2.2.2- Exploitation des données

2.2.2.1- Les mesures du récepteur

Aucun programme spécifique n'a été écrit pour récupérer les données utiles du fichier transmis par le récepteur. On a constitué à la main un second fichier contenant les informations utiles au calcul d'une vingtaine de positions. Cela est trop peu pour faire des statistiques mais suffisant pour se faire une idée sur la qualité de la position calculée par le programme. Voici un extrait du fichier utilisable correspondant à une mesure:

```

114      8      5      0      0      0
4213463.46 162479 4769773.13 122116.44 0 0
15      4555.51 26329.476684 1978.790885 -3254.583432
25.331791
17      15849.08 25523.11503 7619.301683 3686.992472
19.128423
25      1841.51 19982.942531 -10094.378704 14425.671401
13.093782
30      15473.88 17311.392002 16544.431025 11360.33626

```

	-16.905436			
1	243.26	-6199.434941	-15761.670779	20617.038935
174.652044				

Ce tableau est immédiatement lisible par Scilab à l'aide de la fonction `fscanfMat`.

Voici la description du format :

-1ère ligne : en-tête

- Jour de la mesure (114 correspond au 114ème jour de l'année 2001 soit le 24 Avril)
- Instant de la mesure (en heure)
- Nombre de satellites visibles
- 1 si on ne dispose pas du résultat du calcul interne au récepteur
- 1 si la mesure n'est pas valable
- Numéro d'un satellite à ne pas prendre en compte lors du calcul

-2ème ligne : résultat du calcul du récepteur

- 3 coordonnées d'espace en mètre
- un décalage d'horloge

-3ème à (3+nombre de satellite)ème ligne : données et mesure pour chaque satellite

- Numéro du satellite
- Mesure du décalage du C/A code émis par le satellite par le récepteur (en 16ème de bits)
- 3 coordonnées d'espace correspondant à la position du satellite à l'instant où le signal reçu par le récepteur a été émis par le satellite.
- Décalage de l'horloge du satellite à ce même instant.

Enfin, la fonction `complete` du fichier `manipulation.sci` se charge de rajouter une position approchée dans le tableau quand on ne dispose pas du résultat du calculateur. Comme le récepteur était fixe, elle se contente d'insérer une position calculée à un autre instant.

2.2.2.2- Les orbites

Comme on l'a vu, les positions des satellites sont données tous les quarts d'heure. C'est pourquoi la vingtaine de mesures retenues pour tester le programme ont toutes été faites à un instant qui correspond à ce quart d'heure à quelques millisecondes près. Grâce à cela, on a pu dans un premier temps, en première approximation remplir le tableau de données décrit sans calculs.

Problème

Cependant les erreurs introduites sont grandes. L'erreur principale correspond au temps de propagation du signal. Le satellite est à quelques dizaines de milliers de kilomètres de la terre, soit quelques centièmes de secondes. Pendant ce temps, les satellites qui ont une vitesse relative à la terre d'environ 3 km/s ont donc fait une centaine de mètre. Cette erreur se retrouve sur la détermination de la position. En première approximation, une estimation de ce retard est celui qu'aurait le signal arrivant à la position approchée. On peut donc écrire :

$$\hat{\delta}t_p^k = \frac{1}{c} \cdot \|x^k - x_0\|$$

Solution

La solution consiste à interpoler les positions de satellites données par l'IGS pour être capable de donner une position du satellite à tout instant. Dans le cadre du Modex, cette

interpolation n'a pas besoin d'être très précise puisque toutes les mesures ont été faites au voisinage de quarts d'heure, donc on ne se situera jamais « loin » d'un point donné pour interpoler. Les fonctions du fichiers `orbite.sci` réalisent la correction correspondante.

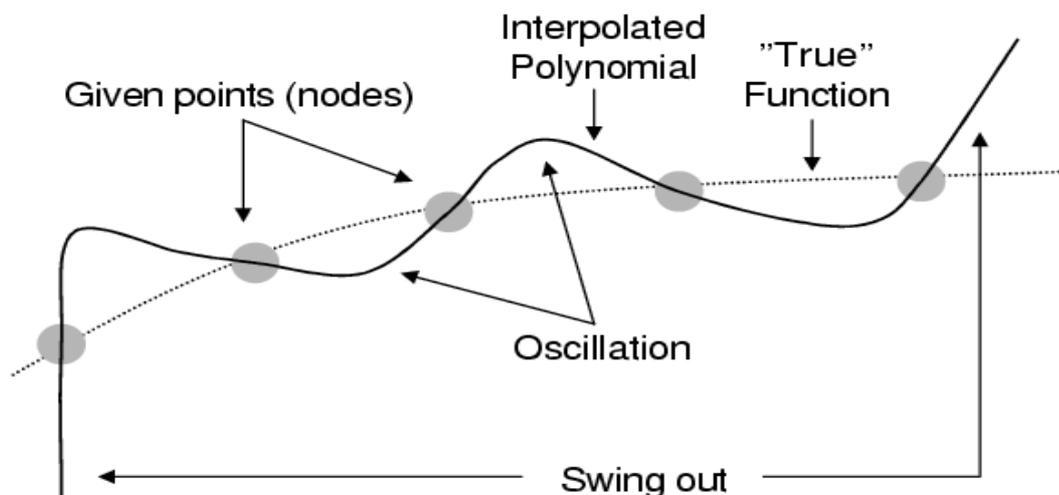
Pour pouvoir être lu par Scilab (commande `fscanfMat`), les fichiers SP3 ont été simplifiés. On a enlevé l'entête et la première colonne. Il est ensuite aisé de trouver la ligne des coordonnées de tel satellite à telle heure par un simple calcul : On compte trente lignes par quart d'heure et on ajoute le nombre de ligne correspondant au numéro du satellite.

La fonction `orbite` réalise l'interpolation. Elle prend en argument un numéro de satellite n , l'instant T auquel on veut la position du satellite, et un tableau `orb` au format SP3 simplifié. Elle appelle la fonction `extrait` qui renvoie un tableau de $2.L$ lignes par 5 colonnes. Chaque ligne contient :

- colonne 1 : temps t à laquelle la position est valable, en heure
- colonnes 2 à 4 : position du satellite à l'instant t
- colonne 5 : Décalage de l'horloge du satellite par rapport au temps GPS à l'instant t en microsecondes

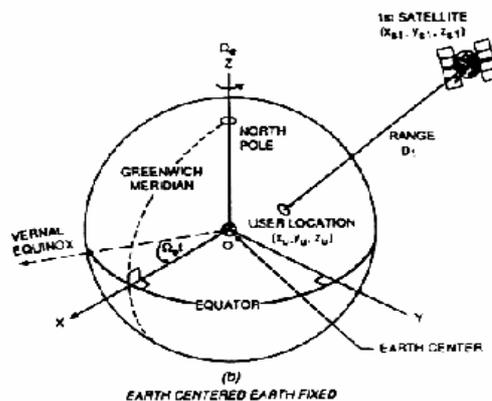
Le nombre de lignes dépend de la qualité de l'interpolation souhaitée. Le problème n'est pas simple, et suivant la méthode, on peut constater une dégradation si on augmente trop le nombre de points. Ce phénomène est illustré sur la figure ci-dessous. Dans tous les cas, on prend autant de points de chaque côté de l'instant de mesure.

Grâce à ce tableau et les fonctions `interp` et `splin` de Scilab, on calcule une position de l'orbite à l'instant T .



On est donc capable de calculer la position du satellite à l'instant $T - \delta t_d$ où il a émis le signal reçu à l'instant T par le récepteur. Cependant, cette position est donnée dans le référentiel terrestre de l'instant $T - \delta t_d$, il faut donc tenir compte de la rotation de ce référentiel pendant le temps δt_d . La figure ci-dessous permet de visualiser le problème. Ainsi, on a la relation suivante entre la position interpolée et la position utilisable :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}_{\text{repère terrestre à } T} = R(\delta t_d^k) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}_{\text{repère terrestre à } T - \delta t_d^k}$$



La fonction `corrige` se charge de réaliser ces deux corrections des positions des satellites dans un tableau du même format que celui du fichier utilisable.

2.2.3.3- Le calcul

La fonction `pos` du fichier `manipulation.sci` est capable de lire un tableau de format identique à celui du fichier utilisable et de renvoyer la position calculée du récepteur. Elle fait appel à la fonction `conv` qui commence le calcul de la position pour un jeu de mesures. Le format est le suivant : par calcul de position, on obtient les 4 lignes suivantes :

- 1ère ligne : jour, heure de la mesure, nombre de satellites
- 2ème ligne : position approchée utilisée
- 3ème ligne : position calculée
- 4ème ligne : DOP en vertical, Est-Ouest, Nord-Sud, et en temps

Pour compléter ces résultats, la fonction `err` du fichier `manipulation.sci` lit ce que renvoie `pos` pour donner des résultats sous la forme d'un tableau à une ligne par mesure :

- colonnes 1 à 3 : jour, heure de la mesure, nombre de satellites
- colonnes 4 à 7 : position calculée avec x,y,z en mètres, et dt en microsecondes
- colonnes 8 à 12 : corrections apportés par rapport à la position approchée : totale, Est-Ouest, Nord-Sud, horizontale, verticale
- colonnes 13 à 16 : DOP totale, DOP Est-Ouest, DOP Nord-Sud, HDOP, VDOP

C'est les résultats contenus dans ce tableau que l'on va maintenant exploiter.

2.3- Résultats

Ces résultats sont des indications qui ont servi pour améliorer le fonctionnement du programme. Ils portent sur une série de 22 mesures. Sur ces 22 mesures, 17 seulement ont effectivement permis de déterminer une position du récepteur. Les 5 restantes présentaient une mauvaise configuration géométrique, ou alors avaient été faites sur des satellites dont on ne connaissait pas le décalage d'horloge.

2.3.1- Moyennes et écarts-types

On compare les résultats obtenus avec ceux calculés par le récepteur lui-même. En ce qui concerne les écarts-types, on a le tableau suivant :

<i>Direction</i>	<i>Récepteur</i>	<i>Modex</i>	<i>Écart des moyennes</i>
Altitude	~30m	~50m	15m
Est-Ouest	~17m	~30m	-2m
Nord-Sud	~17m	~30m	17m

On voit dans les deux cas le fait que la détermination de l'altitude est plus difficile. On peut l'expliquer par les DOP ou directement par la disposition des satellites : tous les satellites sont au dessus du plan horizontal ce qui explique la difficulté de déterminer l'altitude. Pour expliquer la différence des performances (le programme est deux fois moins bon que le récepteur, on peut avancer que le récepteur utilise des corrections ionosphériques qui peuvent induire un allongement de 30m du pseudorange. Cette idée est corroborée par l'écart des moyennes Nord-Sud. En effet, les satellites sont surtout présents au Sud du point d'observation comme on le voit sur la figure ci-dessous, donc une augmentation de leur pseudorange induit un décalage vers le Nord lors du calcul de la position.

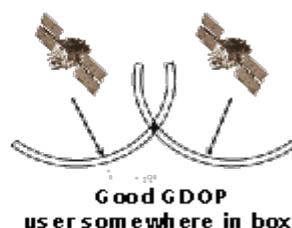
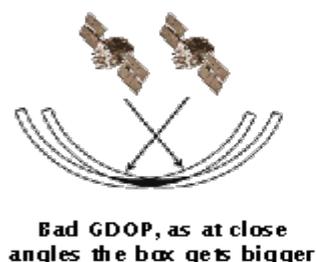
La dispersion horizontale des données est visible sur le graphique de la figure 2-1. Le Nord est en haut et l'Est à droite. L'unité utilisée est le mètre. Les croix représentent les résultats du calcul tandis que les diamants représentent les positions données par le récepteur. Le graphique est centré sur la position moyenne de ces dernières. La croix entouré est la position moyenne calculée.

La dispersion verticale pour les positions calculées est visible sur le graphique 2-2. On peut comparer avec le graphique 2-3 de la dispersion des positions données par le récepteur.

Enfin, en ce qui concerne les DOP, on peut tracer les graphiques de l'erreur commise en fonction de la DOP correspondante. L'unité utilisée est le mètre. Les points que l'on voit sur l'axe des ordonnées correspondent aux mesures avec 4 satellites pour lesquelles la DOP n'est pas calculable.

La figure 2-4 montre l'erreur totale en fonction de la GDOP. On voit que le calcul de la DOP permet d'éliminer des mesures qui présentent une trop mauvaise configuration géométrique. La figure ci-dessous illustre bien le phénomène. On pourrait par exemple ne pas calculer de position lorsque la GDOP dépasse 80. Le récepteur utilise certainement cette méthode dans son algorithme. En effet, il y a dans les données utilisées une mesure pour laquelle le récepteur n'a pas rendu de position, et ces données présentent une GDOP très élevée.

Sur les figures 2-5, 2-6, et 2-7 qui représentent respectivement les erreurs Est-Ouest, Nord-Sud et verticale en fonction des DOP correspondantes, on distingue mieux le fait que les DOP soient un estimateur des erreurs commises. On voit que la DOP Est-Ouest est la plus faible, tandis que les DOP Nord-Sud et verticale sont du même ordre de grandeur. On le retrouve dans les résultats, avec un écart-type important sur l'altitude et une position moyenne décalée vers le Nord.



2.3.2- Résultats obtenus en supprimant une partie du calcul

2.3.2.1- Absence de correction des positions des satellites

Sans correction due au temps de propagation du signal, on obtient les résultats suivant :

<i>Direction</i>	<i>Écart-Type</i>	<i>Erreur sur la moyenne</i>
Altitude	~110m	150m
Est-Ouest	~80m	22m
Nord-Sud	~110m	80m

2.3.2.2- Prise en compte de 4 satellites uniquement

Dans ce cas on obtient les résultats suivant :

<i>Direction</i>	<i>Écart-Type</i>	<i>Erreur sur la moyenne</i>
Altitude	~150m	155m
Est-Ouest	~100m	102m
Nord-Sud	~110m	115m

2.3.2.3- Autres

Si on ne prend pas en compte les décalages d'horloges des satellites, ou si on ne considère pas le décalage de l'horloge du récepteur comme une inconnue, la détermination de la position est impossible.

2.3.3- Conclusion

Cette partie du projet a permis de mieux comprendre le fonctionnement d'un récepteur GPS commercial utilisant le C/A code. Cependant, il reste beaucoup de points du programme à améliorer. En ce qui concerne le calcul, on peut penser à la résolution des ambiguïtés entières sans position approchée et la prise en compte de corrections ionosphériques et/ou troposphériques. Pour la partie de gestion des données, il faudrait automatiser leur traitement afin de pouvoir faire des statistiques sur les résultats du programme.

3- Traitement de données de positionnement

Cette dernière partie a pour objectif de mener une courte analyse des séries de positions enregistrées par un récepteur GPS dans le cadre d'une expérimentation menée à l'ENSG de novembre 2000 à janvier 2001. Cette analyse s'inscrit donc dans la continuité de la partie précédente : après avoir déterminé une méthode de calcul des positionnements, on peut se permettre d'étudier des données rendues accessibles par cette méthode. En réalité les données traitées ici ont été fournies par l'ENSG et surtout ont été obtenues par des méthodes de calculs bien plus performantes et précises que précédemment. De plus, cette expérimentation a déjà donné lieu à une étude de Messieurs Patrick Sillard, Serge Botton et Didier Bouteloup, professeurs et/ou chercheurs à l'ENSG dont le compte-rendu est paru dans le Bulletin d'Information de l'IGN de mars 2001.

Ainsi nous avons choisi de ne lire ce compte-rendu qu'une fois nos travaux sur les données effectués, et ce afin de pouvoir comparer les résultats auxquels nous aboutissions avec ceux présentés dans ce compte-rendu.

Ainsi après une succincte présentation du contexte expérimental qui s'inspire nettement de celle effectuée dans le document cité précédemment, nous détaillerons les outils envisagés pour l'étude des données et les résultats obtenus ; enfin nous tenterons de mettre en relief l'intérêt et les limites de ceux-ci et ce, en comparaison avec les résultats présentés dans le document cité.

3.1- Le contexte expérimental : tester la stabilité d'un mât

Sur le toit de l'ENSG sont installées deux antennes GPS (antenne DORNE MARGOLIN connue pour sa précision et utilisée par l'IGS, et le RGP) : l'une est reliée à une station GPS permanente du RGP dont les données d'enregistrement sont facilement accessibles, l'autre, située à une dizaine de mètres environ de la première, est installée au sommet d'un mât métallique de 2m de hauteur, haubané. Ce mât standard est celui prévu pour la mise en place d'un réseau de récepteur DORIS (système qui peut servir pour effectuer du positionnement mais dont la spécificité technique ne sera pas détaillée ici). En effet il faut noter que la stabilité des mâts DORIS est mise en cause depuis que la mesure d'une position fixe par un système DORIS s'est révélée moins précise que celle effectuée par GPS.

Les deux récepteurs GPS bifréquence reliés à ces antennes fournissent des données qui sont traitées par le logiciel Geogénus (logiciel développé en Allemagne mais qui n'était pas à notre disposition) pour donner la position très précise de l'antenne située au sommet du mât. La précision est garantie par 3 facteurs :

- la station de référence a une position connue parfaitement dans le WGS-84
- le calcul du vecteur de base par DGPS est plus performant
- la méthode de calcul des positions par la phase, en bifréquence, et avec résolution des ambiguïtés en vol assure une grande précision.

Enfin la fréquence d'acquisition des données de position fixée à 1 s, est un argument majeur pour la justification de cette méthode d'enregistrement des positions. En effet des

méthodes, avec utilisation de distancemètre par exemple sont disponibles, mais ne permettent pas un échantillonnage inférieur à la minute.

Ainsi, il a été mis à notre disposition par Monsieur Botton des fichiers dits ".POS" contenant chacun pour un jour donné (numéroté de 001 à 365) et un créneau d'une heure donnée (noté de "a" à "x"), les 3600 lignes de données disponibles. Un exemple de ces fichiers est donné à la figure 3-0. Ces fichiers ont donc été lus avec Excel, élagués des informations inutiles, puis remis en mémoire sous forme de fichiers ".txt" facilement exploitables par Matlab afin de constituer des matrices de données contenant Latitude, Longitude et Altitude en colonnes. Ce traitement préalable fut laborieux et a malheureusement pris beaucoup de temps.

Plusieurs remarques préalables concernant ces données sont à effectuer : les jours sur lesquels nous avons travaillé sont 003, 004, 022 particulièrement et non 341 comme il a été fait pour le compte-rendu cité en introduction de partie ; nous nous sommes restreints à traiter les données des créneaux horaire d, e, f et p ,q ,r dans la mesure où ils sont séparés de 12 heures (ce qui a un intérêt comme nous le verrons par la suite) et surtout parce qu'ils étaient les seuls dont les fichiers ressources étaient à la fois disponibles et quasi-complets pour différentes journées.

Ashtech, Inc. GPPS-2		Program: GeoGenius		Version: 2.000							
Project has not been saved yet		Differentially Corrected: Y									
SITE	MM/DD/YY HH:MM:SS	SVs	PDOP	LATITUDE	LONGITUDE	HI	RMS	FLAG	V_EAST	V_NORTH	V_UP
????	12/06/00 00:00:01.000000	7	1.9	N 48.84108111 E	2.58743725	162.6467	0.004	0	0.000	0.000	0.000
????	12/06/00 00:00:02.000000	7	1.9	N 48.84108112 E	2.58743725	162.6491	0.005	0	0.000	0.000	0.000
????	12/06/00 00:00:03.000000	7	1.9	N 48.84108111 E	2.58743726	162.6475	0.004	0	0.000	0.000	0.000
????	12/06/00 00:00:04.000000	7	1.9	N 48.84108111 E	2.58743724	162.6477	0.004	0	0.000	0.000	0.000
????	12/06/00 00:00:05.000000	7	1.9	N 48.84108111 E	2.58743723	162.6431	0.004	0	0.000	0.000	0.000
????	12/06/00 00:00:06.000000	7	1.9	N 48.84108112 E	2.58743722	162.6418	0.006	0	0.000	0.000	0.000
????	12/06/00 00:00:07.000000	7	1.9	N 48.84108111 E	2.58743723	162.6444	0.004	0	0.000	0.000	0.000
????	12/06/00 00:00:08.000000	7	1.9	N 48.84108111 E	2.58743723	162.6451	0.003	0	0.000	0.000	0.000
????	12/06/00 00:00:09.000000	7	1.9	N 48.84108111 E	2.58743723	162.6446	0.003	0	0.000	0.000	0.000
????	12/06/00 00:00:10.000000	7	1.9	N 48.84108112 E	2.58743721	162.6433	0.004	0	0.000	0.000	0.000
????	12/06/00 00:00:11.000000	7	1.9	N 48.84108110 E	2.58743722	162.6444	0.004	0	0.000	0.000	0.000
????	12/06/00 00:00:12.000000	7	1.9	N 48.84108110 E	2.58743724	162.6446	0.004	0	0.000	0.000	0.000
????	12/06/00 00:00:13.000000	7	1.9	N 48.84108111 E	2.58743721	162.6422	0.004	0	0.000	0.000	0.000

Figure 3-0

3.2- Comment analyser ces données de positionnement ?

Comme nous l'avons déjà signalé notre choix a été d'utiliser le logiciel Matlab et d'utiliser des fonctions propre au traitement du signal et à l'analyse des séries temporelles. Nous nous attacherons dans un premier temps à présenter quelques notions théoriques concernant les outils mathématiques utilisés puis nous montrerons comment ils ont été mis en œuvre dans le cadre de cette étude.

3.2.1- Quelques éléments sur les processus stochastiques

On appelle processus stochastique toute suite de variables aléatoires $(x(t))_{t \in I}$

A partir d'une réalisation de ce processus on calcule plusieurs estimateurs de grandeurs utiles pour l'étude du processus. On connaît par exemple une estimation de la moyenne ou de la variance. La fiabilité de ces estimateurs est directement lié à la quantité de données disponibles et à des problèmes d'ergodicité qui ne seront pas envisagés ici.

Une notion importante est celle de la stationnarité du processus. Un processus est dit stationnaire si sa moyenne sa moyenne ne varie pas dans le temps et si $cov(x(t), x(t+\tau))$ ne dépend que de τ où cov désigne la covariance. Dans le cadre de cette étude, on fera l'hypothèse que le processus est stationnaire même si cette hypothèse est plus liée au fait que on se rend bien compte que la position de l'antenne GPS ne va pas "dériver" au cours du temps mais au contraire rester fixe.

3.2.1.1- Auto et inter-corrélation

On définit la fonction d'auto-corrélation par $R_x(\tau) = E(x(t), x(t+\tau))$ qui est bien une fonction de τ uniquement dans l'hypothèse d'un processus stationnaire. Pratiquement

cette fonction sera estimée par
$$\Gamma_n(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{i=n-\tau} x_i x_{i+\tau}$$

La fonction d'auto-corrélation donne un grand nombre d'information sur la nature du signal. Elle permet en particulier de voir si le signal est corrélé d'un instant à un autre. Intuitivement on pourra dire qu'une fonction d'auto-corrélation faible traduira un processus "sans mémoire" et le contraire pour une fonction à valeurs élevées. Par exemple la fonction d'auto-corrélation associée à un bruit blanc est un dirac en 0 de valeur sa variance.

On peut également noter comme propriétés de la fonction d'auto-covariance qu'elle est paire, que sa valeur absolue est majorée par sa valeur en $\tau=0$, enfin qu'elle est périodique si le processus est périodique.

On utilisera également, afin de comparer deux séries temporelles distinctes, l'inter-corrélation. On la définit théoriquement par $R_{xy}(\tau) = E(x(t), y(t+\tau))$ et on l'estime par

$$\Gamma_n(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{i=n-\tau} x_i y_{i+\tau}$$
. Là encore intuitivement on y percevra une information quant à

la nature de la relation entre les deux séries temporelles étudiées.

3.2.1.2- Densité spectrale

Enfin, on utilisera la densité spectrale définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation : $S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$. Celle-ci contient la même information que la fonction d'auto-corrélation mais permet une lecture qualitative plus aisée. Pour les processus discrets on l'évaluera par une transformée de Fourier rapide effectuée sur le vecteur décrivant la fonction d'auto-corrélation.

A titre d'information, on présente ci-dessous un tableau d'exemple de densités spectrales associés à des bruits classiques.

$F(\omega)$	appellation
$\frac{\sigma^2}{\omega^2}$	Marche aléatoire
$\frac{\sigma^2}{\omega}$	Bruit de Flicker
σ^2	Bruit blanc

3.2.2- Mise en oeuvre

Comme nous l'avons déjà précisé les données sont présentes dans Matlab sous forme de vecteurs de longueur 3 heures = 10800 s. En réalité Ces vecteurs sont parfois un peu plus courts à cause d'éventuels manques dans les enregistrements d'origine. On considère que ces manques de l'ordre de quelques secondes au total n'influencent pas le traitement des données. Pour simplifier les choses nous avons choisi d'enlever les 100 dernières secondes de chaque heure, ce qui nous fait travailler avec des vecteurs de taille 10500. De plus, il est nécessaire de travailler avec des vecteurs dont les valeurs sont centrées en 0. C'est pourquoi on retranche la moyenne systématiquement. En effet si l'on examine un extrait des données qui est présenté à la figure x, on se rend compte que celles-ci ne varient que très peu autour de leur moyenne.

On applique alors à ces vecteurs la fonction `xcorr()` qui retourne un vecteur de taille double représentant la fonction de corrélation (Pour obtenir une inter-corrélation, il suffit de placer deux vecteurs en argument au lieu d'un). On peut alors tracer la densité spectrale en utilisant la fonction `fft()` sur le vecteur obtenu précédemment. Il faut préciser que pour Matlab 10500 correspondra sur le graphique de la puissance spectrale à la fréquence d'échantillonnage, c'est-à-dire 1 Hz ou encore à une période de 1s. Les graduations correspondront donc à des fractions de cette fréquence.

Les graphiques d'auto-corrélation et de densité spectrale nous permettront donc d'évaluer le type de traitement à appliquer au signal pour en extraire de l'information ou simplement pour vérifier des hypothèses. Comme nous serons conduits à utiliser des filtres passe-bas, précisons tout de suite comment ils seront mis en oeuvre. On utilise les filtres numériques FIR1 de Matlab qui permettent de construire un vecteur à n composantes où n désigne l'ordre du filtre. Ainsi `FIR1(100,0.2)` construit un vecteur de taille 100 qui correspond à un filtre de fréquence de coupure $0.2 \cdot 0.5$ Hz ce qui fait 100 s. (c'est bien 0.5 Hz qui est la moitié de la fréquence d'échantillonnage).

3.3- Exposé et commentaire des résultats

3.3.1- Auto-corrélation et filtrage du signal

On travaille pour l'instant sur les heures d, e, f du jour 23. Les données de longitude ont cette allure (figure 3-1). On remarque que cela a bien l'air d'un bruit mais en réalité on est bien incapable de dire quoi que ce soit sur la nature réelle du signal. En outre, afin de limiter le nombre de graphiques présentés, nous ne présenterons pas les tracés effectués pour la latitude qui sont très semblable.

On trace donc la fonction d'auto-corrélation (figure 3-2) et l'on s'aperçoit qu'elle est très différente de celle d'une fonction obtenue aléatoirement avec la fonction RAND de Matlab (figure 3-3). De plus, on peut remarquer la présence de pics significatifs qui traduisent la présence d' "information" dans le signal même si l'on ne peut rien dire de plus. Enfin le fait que la fonction tende vers 0 rapidement peut attester l'hypothèse de stationnarité.

On trace donc la densité spectrale (figure 3-4), ici représentée de 0 à 800 environ, c'est-à-dire pour des périodes de l'infinie à plus de 7 s. On se rend compte que l' "énergie" se situe au niveau des basses fréquences avec la présence d'au moins 4 pics régulièrement espacés. Au delà de 500 (c'est-à-dire en dessous de 20 s), on ne remarque plus rien de significatif. C'est cette observation qui nous conduit à utiliser des filtres passe-bas dont la période de coupure se situe au dessus de 20 s afin de voir comment se comporte le signal ainsi filtré. Les résultats des filtrages sont groupés dans la figure 3-5 pour le filtre 1, 3-6 pour le filtre 2 et 3-7 pour le filtre 3. On trouve dans le tableau ci-dessous la description des filtres qui sont tous d'ordre 100, valeur choisie empiriquement. Il apparaît clairement que l'on ne commence à perdre de l'information qu'à partir du filtre 3

<i>N° du filtre</i>	<i>Coeff dans FIR1</i>	<i>Période de coupure (s)</i>
	1	2
1	0.095	21
2	0.029	70
3	0.017	117

3.3.2- Inter-corrélation

On présente dans la figure 3-8 le résultat de l'inter-corrélation du jour 003 "d,e,f" avec le jour 004 def. Ce résultat ressemble beaucoup à ce que l'on avait obtenu pour l'auto-corrélation du jour 003 "d,e,f" (figure 3-2). On peut donc supposer que les deux signaux contiennent une information qui possède des caractéristiques communes.

Comme contre-exemple de ce résultat on présente, à la figure 3-9, l'inter-corrélation du jour 003 "d,e,f" avec le jour 003 "p,q,r". On obtient une courbe très difficile à interpréter sinon à dire que les deux signaux sont totalement décorrélés.

On peut réitérer l'expérience en inter-corrélant jour 003 "d,e,f" avec jour 005 "d,e,f" (figure 3-10) ou encore jour 003 "d,e,f" avec jour 004 "p,q,r" (figure 3-11), les résultats demeurent identiques.

3.3.3- Interprétation

Ces graphiques d'inter-corrélation ne prouvent rien mais laissent supposer que l'on retrouve chaque jour un type de signal qui possèdent des caractéristiques propres se répétant de jour en jour. La décorrélation à 12 heures semble alors indiquer qu'il existerait divers régimes selon la période de la journée.

Si l'on prend en compte les informations procurées par le filtrage du signal, en particulier le fait que l'on commence à perdre de l'information qu'à partir du filtre 3, on peut penser qu'en réalité les phénomènes se répétant d'un jour à l'autre ne se manifestent que sur des périodes supérieures à environ 100 s. Toute sorte d'hypothèses sont alors envisageables quant à la nature des causes : les conditions météo et en particulier le vent puisqu'il s'agit d'un mât placé sur un toit seraient les plus plausibles.

3.3.4- Comparaison avec les résultats du CR et conclusion

Pour mieux comprendre l'intérêt de cette succincte étude, nous pouvons effectuer maintenant le rapprochement avec le CR. Dans le CR, les méthodes mathématiques utilisées sont beaucoup plus complètes. Les auteurs font appel à des processus ARMA (Auto-régressif, moyenne-mobile) et déterminent ainsi un filtre qui optimise la réduction du bruit du signal, là où nous nous sommes contentés d'appliquer de simples filtres passe-bas qui au regard des résultats présentés dans le CR, ne sont finalement pas totalement inefficaces. En revanche, l'inter-corrélation n'est pas évoquée dans le CR, tandis que notre ébauche de raisonnement à partir des graphiques d'inter-corrélation laisse penser que l'étude pourrait être complétée dans ce domaine.

En effet, il serait sans doute possible, ce qui n'est pas mentionnée dans le CR, de pratiquer une inter-corrélation avec des données de nature différentes en particulier météorologiques. Nous n'avons pas réussi à retrouver trace de ce type de données pour une station météo proche de l'ENSG d'autant qu'il serait surprenant de rencontrer des systèmes enregistrant ce type de données à une fréquence d'échantillonnage de l'ordre de la seconde. D'ailleurs, sur ce point, on peut affirmer, d'après le paragraphe sur le filtrage que l'on pourrait sans difficulté se contenter d'une fréquence d'échantillonnage de l'ordre de la minute.

Ainsi, bien que ces quelques réflexions sur l'analyse des données de position du mât de l'ENSG, puissent paraître quelque peu qualitatives, il nous est apparu intéressant de présenter les tracés obtenus et d'essayer d'en tirer quelques conclusions. Une étude plus approfondie serait donc nécessaire mais supposerait la disponibilité d'autres types de données afin de tester l'hypothèse de mouvements du mât liés aux conditions météorologiques.

CONCLUSION GENERALE

Le système GPS est un outil extraordinaire aux applications très étendues, encore faut-il savoir l'utiliser. Derrière l'écran sur lequel le randonneur lit sa position se trouve une technologie extrêmement sophistiquée - une des rares applications de la relativité générale à la vie quotidienne !

Du point de vue du secteur utilisateur, il faut des récepteurs dotés d'une électronique d'autant plus perfectionnée que l'on souhaite une position précise. Pour que la précision de l'électronique et donc des mesures soit utilisable, il faut ensuite des algorithmes capables de tirer le meilleur parti des mesures, l'exemple développé dans la seconde partie n'étant qu'une simplification du modèle le plus simple utilisé aujourd'hui dans les récepteurs bas-de-gamme. Enfin, il faut être capable d'utiliser la position obtenue, que ce soit dans un système de guidage routier, ou, à l'autre bout de l'échelle de qualité, par un traitement adapté des données de positionnement d'une antenne Doris, ce qui est loin d'être évident comme on l'a vu dans la dernière partie.



En effet, il ne suffit pas d'avoir des données, aussi précises soient-elles, encore faut-il disposer des outils mathématiques nécessaires pour les analyser. Plus particulièrement, dans les deux situations traitées, la distinction des erreurs ou du bruit (ou la mise en évidence de l'information) a été le fil conducteur du projet. Dans le domaine précis du positionnement par satellite, on sait de mieux en mieux le faire, ce qui se traduit par une amélioration des résultats. On peut prévoir que les nouveaux systèmes de satellites qu'ils soient européens ou américains permettront encore des gains de précision substantiels. A quand le millimètre de précision sur une ligne de base de mille kilomètre !

Bibliographie

-*The National Geodetic Survey Standard GPS Format SP3* (sp3_docu.txt sur le site de l'IGS)

-Mode d'emploi du récepteur GPS trimble

-*GPS performance in Navigation* de Pratap Misra, Brian P.Burke, Michael M. Pratt (in *Proceedings of the IEEE*, Janvier 1999)

-*Linear Algebra, Geodesy, and GPS* de Gilbert Strang, Kai Borre (Wellesley-Cambridge Press)

-*Un exemple de traitement de séries temporelles de positions d'instrument géodésique* de Patrick Sillard, Serge Botton, Didier Bouteloup (Bulletin d'information de l'IGN n°72, Mars 2001)